§2.1 欧氏空间~~的插补~~

$\mathbb{R}^n := \{x=(x_1,\cdots,x_n), x_i\in\mathbb{R}\}$

Def. $I=\{x=(x_1,\cdots,x_n); a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 称为开区间

简记为 $(a_1,b_1;\cdots,a_n,b_n)$，类似有$[\ \ )$，$(\ \ ]$，$[\ \ ]$等.

事实上，若 $a_i=b_i$，则区间退化，因此两个区间的差也是区间.

Def. $\forall I$，称 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ 为区间 I 的体积.

Def. 称 $\rho(x,y)=\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right|^{\frac{1}{2}}$ 为区间中 x 和 y 的距离.

Prop. (1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0 \iff x=y=0$

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Def. 若 $\rho(x, x_m) \to 0\ (m\to\infty)$，则称点列 $\{x_m\}$ 收敛于 x，记为 $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$.

$\{x_m\}$ 收敛到 $x \Longleftrightarrow \{x_m\}$ 任一子列收敛到 x.

Thm. 若 $x_m \to x$，$y_m \to y$，则 $m\to\infty$ 时 $\rho(x_m, y_m) \to \rho(x, y)$

Def. $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$，记 $\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x, x_0) < \delta\}$ 为以 x_0 为原心，δ 为半径的邻域，记为 $O(x_0, \delta)$

Thm. $\forall\, O(x_0, \delta)$，$\exists\, \delta_1 > 0$ s.t. $O(x_1, \delta_1) \subset O(x_0, \delta)$

Pf. 取 $\delta_1 \in (0, \delta - \rho(x_0, x_1))$，$\forall x \in O(x_1, \delta_1)$，有

$$\rho(x, x_0) \le \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_0) \le \delta_1 + \rho(x_0, x_1) < \delta$$

Prop. $x_m \to x \Longleftrightarrow \forall \delta > 0$，$\exists N > 0$，$n > N$ 时 $x_n \in O(x, \delta)$

Def. 若 $\exists x \in \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$ s.t. $A \subset O(x, \delta)$，则 A 是有界集

称 $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x, y\in A} \rho(x, y)$ 为 A 的直径

Thm. Bolzano — Weierstrass

$\mathbb{R}^n$ 中任何有界点列都有收敛子列.